Задание № 25 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**30.9 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)**

**Д30.9.1 Метод Лагранжа**. Пусть дано неоднородное уравнение  и известно общее решение  соответствующего однородного уравнения . Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде , где  - некоторые, пока неизвестные функции.

Эти функции подчиняются лишь одному условию, получающемуся при подстановке функции  в неоднородное дифференциальное уравнение. Для определения функций  необходимо придумать еще  условие.

Рассмотрим производные функции :

.

Пусть  (первое условие), тогда  и .

Пусть (второе условие), тогда . Вычислив третью производную, получаем третье условие:  и т.д. Последнее условие получим после вычисления : . Теперь подставляем функцию  и ее производные ,  и т. д. в уравнение . Получим:

 (последнее условие).

Для определения функций  получили систему линейных алгебраических уравнений



Определитель системы есть определитель Вронского функций , составляющих фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения, поэтому он не равен нулю и система имеет единственное решение.

Д30.9.2 *Пример:* Найти общее решение уравнения .

*Решение:* Фундаментальная система решений состоит из функций  (Д9.2.3). Общее решение дифференциального уравнения ищем в виде .



решим систему по правилу Крамера:



, 



, где - произвольная постоянная,





30.11 Неоднородные уравнения с правой частью специального вида

Если порядок дифференциального уравнения достаточно велик, то метод вариации произвольных постоянных становится громоздким. При этом вычисление интегралов на завершающем этапе метода также может оказаться достаточно трудоемким. Однако, если правая часть дифференциального уравнения представляет собой многочлен, показательную или тригонометрическую функцию, то независимо от вида левой части уравнения, можно найти его решение без использования интегралов. Рассмотрим два случая.

Д30.11.1 Случай 1: Дифференциальное уравнение имеет вид , где  - некоторый многочлен степени  (в частности, многочлен может быть просто постоянной),  - некоторое действительное число (в частности, может быть ).

Ищем решение неоднородного уравнения в виде , где  - многочлен с неопределенными коэффициентами, той же степени, что и ,  - кратность числа  как корня характеристического уравнения (в частности, если  не является корнем характеристического уравнения, то ). Значения неопределенных коэффициентов находим после подстановки функции  в дифференциальное уравнение. Затем находим общее решение  однородного уравнения . По теореме об общем решении неоднородного уравнения получаем, что функция  является общим решением исходного неоднородного уравнения.

*Пример:* Найти общее решение уравнения 

*Решение:* Найдем общее решение однородного уравнения : корни характеристического уравнения равны . Общее решение - .

В данном случае  - многочлен первой степени, поэтому  - некоторый многочлен первой степени с неопределенными коэффициентами. Число  является однократным корнем характеристического уравнения, поэтому  и 





Подставим  в дифференциальное уравнение:



Сократим полученное равенство на , приведем подобные

 и приравняем коэффициенты при равных степенях переменной : , значит, ,  и общее решение имеет вид: .

Д30.11.2 Случай 2: Дифференциальное уравнение имеет вид , где  - некоторые многочлены,  - некоторые действительные числа. Решение неоднородного уравнения ищем в виде , где  - многочлены с неопределенными коэффициентами, степень каждого из которых равна наибольшей из степеней многочленов , - кратность числа  как корня характеристического многочлена.

*Пример:* Найти общее решение уравнения 

*Решение:* Корни характеристического уравнения равны . Общее решение однородного уравнения имеет вид .

В заданном уравнении ,  - многочлены нулевой степени, , число  не является корнем характеристического уравнения, поэтому и .

, . Подставляем функцию  и ее производные в уравнение:

приведем подобные:



приравняем отдельно коэффициенты при синусе и при косинусе:

, , 

Общее решение: .

**Самостоятельная работа:**

20.2.1. Найти общие решения линейных неоднородных ДУ третьего порядка: а) ; б) ; в) ; г) ; д)  е) ; ж) ; з) ; и) ; к) ; л) ;

20.2.2. Найти общие решения линейных неоднородных ДУ четвертого порядка: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

**Ответы:**

**20.2.1.**а); б) ; в) ; г); д) ; е) ; ж); з); и) ; к) ; л) ;

**20.2.2.** а); б) ; в); г); д); е) ;